9 класс. Районный тур 2016-2017. Решения.

Вариант 1

Задача 1. Скользкая дорога

а) Вычислим тормозной путь:

$$l_{\text{ост}} = \frac{v^2}{2a} = \frac{(72/3{,}6)^2}{16} = 25 \text{ м}$$

Осталось учесть тот путь, который пройдет автомобиль до начала торможения:

$$S_{\text{р}} = vt = 20 \cdot 0{,}5 = 10 \text{ м}$$

Тогда полный путь, пройденный автомобилем с момента остановки предыдущего до момента остановки:

$$l = l_{\text{ост}} + S_{\text{р}} = 35 \text{ м}$$

б) Заметим, что расстояние между автомобилями сначала уменьшается с постоянным ускорением a, затем уменьшается с постоянной скоростью (так как машины тормозят с одинаковым ускорением), а в конце снова уменьшается с постоянным ускорением a. Сначала в течение времени $t_{\text{р}}$ дистанция сокращается с ускорением a, а потому за это время оно уменьшится на

$$S_1 = \frac{at_{\text{р}}^2}{2}$$

Далее разница скоростей (скорость сближения) постоянна и равна начальному значению разности скоростей:

$$\Delta v = at_{\text{р}}$$

И значит, за время остановки переднего автомобиля (то есть за время $t_2 = \frac{v - at_{\text{р}}}{a}$), дистанция сокращается на

$$S_2 = \Delta v t_2 = \frac{at_{\text{р}}(v - at_{\text{р}})}{a}$$

Наконец, на последнем участке будет торможение с постоянным ускорением a, с начальной скорости $v_3 = v - at_2$:

$$S_3 = \frac{v_3^2}{2a} = \frac{(v - at_2)^2}{2a}$$

В сумме дистанция уменьшится на:

$$l = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{at_{\text{р}}^2}{2} + \left(vt_{\text{р}} - at_{\text{р}}^2\right) + \frac{(at_{\text{р}})^2}{2a} = vt_{\text{р}} = 10 \text{ м}$$

Второй пункт допускает и другое решение. Очевидно, что тормозной путь одинаков, вне зависимости от машины и от начала торможения (и равен 25 м, из предыдущего пункта). Таким образом, чтобы машины не столкнулись достаточно того, чтобы водитель заднего автомобиля начал тормозить в той же точке, что и первый. Это означает, что он должен проехать расстояние, равное дистанции между автомобилями за время реакции: $s_{\text{р}} = 10$ м — из предыдущего пункта. Таким образом $l = 10$ м

Задача 2. День рождения

Когда мальчик делает уроки на компьютере, мощность тепловыделения процессора ($P_{\text{уроки}}$) меньше, чем когда он играет ($P_{\text{игры}}$). В каждом случае температура процессора устанавливается так, чтобы мощность тепловыделения сравнялась с мощностью теплоотдачи системы охлаждения ($P_{\text{охл}}$). В условии говорится, что мощность системы охлаждения пропорциональная разности температур процессора и воздуха в комнате. Тогда отношение этих разностей температур для случая, когда мальчик играет и делает уроки даст отношение мощностей тепловыделения процессора. Значение этих мощностей не меняется от качества работы системы охлаждения, тогда обозначив за T_x искомую температуру мы можем записать отношение так

$$\frac{T_x - 20°C}{50°C - 20°C} = \frac{60°C - 20°C}{30°C - 20°C},$$

откуда находим $T_x = 140°C$, значит компьютер перегревается, и мальчик не сможет поиграть.

Более строго ответ можно получить следующим образом. То что мощность системы охлаждения пропорциональна разности температур запишем так:

$$P_{\text{охл}} = \alpha \cdot (T - T_0)$$

здесь T — температура процессора, T_0 — комнатная температура, а α — некоторый неизвестный коэффициент пропорциональности.

Теперь запишем уравнения теплового баланса в случае, когда система охлаждения работает в штатном режиме:

$$P_{\text{уроки}} = \alpha \cdot (T_{\text{у}} - T_0)$$
$$P_{\text{игры}} = \alpha \cdot (T_{\text{и}} - T_0)$$

Когда система охлаждения стала работать хуже, изменился коэффициент пропорциональности (будем называть его $\varkappa$). Значит уравнения теплового баланса после неисправности записываются как:

$$P_{\text{уроки}} = \varkappa \cdot (T'_{\text{у}} - T_0)$$
$$P_{\text{игры}} = \varkappa \cdot (T'_{\text{и}} - T_0)$$

Нагрузка на процессор в каждом из режимов осталась прежней. Приравняем выражения для мощностей до и после поломки:

$$\varkappa \cdot (T'_{\text{у}} - T_0) = \alpha \cdot (T_{\text{у}} - T_0)$$
$$\varkappa \cdot (T'_{\text{и}} - T_0) = \alpha \cdot (T_{\text{и}} - T_0)$$

Выразим из этой системы $T'_{\text{и}}$

$$T'_{\text{и}} = T_0 + (T_{\text{и}} - T_0) \cdot \frac{\alpha}{\varkappa} = T_0 + (T_{\text{и}} - T_0) \cdot \frac{T'_{\text{у}} - T_0}{T_{\text{у}} - T_0}$$

Подставляя значения из условия получаем

$$T'_{\text{и}} = 140°C$$

Значит компьютер перегревается, и мальчик не сможет поиграть.

Задача 3. Гонки роботов

Пусть O — общий центр круговых траекторий двух роботов, первый робот имеет имя N_1, второй — N_2, A — положение первого робота в момент времени $t = 0$, B — в момент $t' = T/2 = 105$ с. Где T — время одного полного оборота первого робота (см. рис).

$$OA = OB = R_1 = R$$

Определим положение второго робота в эти же моменты времени. При $t = 0$, $x_1 = R$. Этому условию удовлетворяют две точки C_1 и C_2.

$$AC_1 = AC_2 = x_1 = R$$

$$OA = R_1 = R, \quad OC_1 = OC_2 = R_2 = \sqrt{2}R$$

Видно, что $AC_1^2 + OA^2 = OC_1^2$ (то же для точки C_2). Треугольники $\triangle OAC_1$ и $\triangle OAC_2$ — прямоугольные, равнобедренные, $\angle AOC_1 = \angle AOC_2 = 45°$.

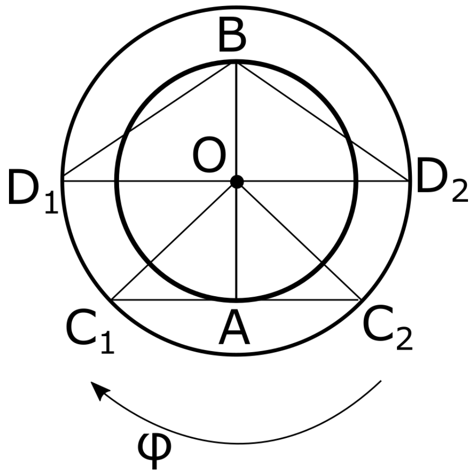
При $t' = 105$ с второй робот находится на расстоянии $x_2 = \sqrt{3}R$ от первого. Этому условию удовлетворяют две точки D_1 и D_2.

$$BD_1 = BD_2 = x_2 = \sqrt{3}R$$

$$OB = R_1 = R, \quad OD_1 = OD_2 = R_2 = \sqrt{3}R$$

Видно, что $OD_1^2 + OB^2 = BD_1^2$ (то же для точки D_2). Треугольники $\triangle BOD_1$ и $\triangle BOD_2$ — прямоугольные, $\angle AOD_1 = \angle AOD_2 = 90°$.

Проанализируем все возможные варианты перемещения робота N_2 за время t'. В условии задачи не сказано, в каком направлении движутся роботы. Пусть второй робот движется по часовой стрелке. Тогда его положение будем задавать углом φ, который отсчитывается от OA (см. рис). При этом будем помнить, что $\Delta\varphi < 360°$ по условию задачи.



Изменение положения $C_1 \to D_1$ даёт изменение угла $\Delta\varphi = 45°$ и перемещение $1/8$ в долях от $2\pi R_2$.

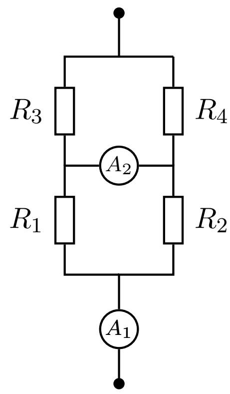
Изменение положения $C_1 \to D_2$ даёт изменение угла $\Delta\varphi = 225°$ и перемещение $5/8$ в долях от $2\pi R_2$.

Изменение положения $C_2 \to D_1$ даёт изменение угла $\Delta\varphi = 135°$ и перемещение $3/8$ в долях от $2\pi R_2$.

Изменение положения $C_2 \to D_2$ даёт изменение угла $\Delta\varphi = 315°$ и перемещение $7/8$ в долях от $2\pi R_2$.

Нетрудно проверить, что для движения против часовой стрелки мы получим тот же набор значений перемещения второго робота — $1/8$, $3/8$, $5/8$ и $7/8$ от $2\pi R_2$. Таким образом, второму роботу для одного оборота по траектории потребуется: $8 \cdot t'$, $8/3 \cdot t'$, $8/5 \cdot t'$ или $8/7 \cdot t'$. Это 840 с, 280 с, 168 с и 120 с соответственно.

Задача 4. Плавление схемы



Обозначим показания вольтметра как U_1, U_2; показания первого амперметра I_1, I_3; второго — I_2, I_4.

Так как $I_2 = 0$, токи в первом и во втором параллельном соединениях делятся одинаковым образом. Значит, отношения сопротивлений резисторов равны (вводим новую переменную):

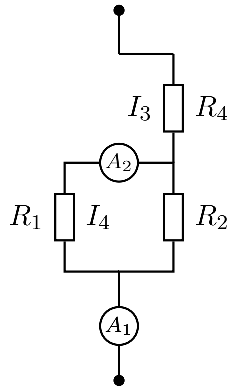
$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_4}{R_3} = c$$

Тогда сопротивление исходной схемы:

$$\frac{1}{\dfrac{1}{R_1+R_3} + \dfrac{1}{R_2+R_4}} = \frac{1}{\dfrac{1}{R_1+R_3}\left(1+\dfrac{1}{c}\right)} = \frac{c}{c+1}\cdot(R_1+R_3)$$

Итак, тогда (закон Ома)

$$U_1 = I_1(R_1+R_3)\frac{c}{c+1}$$



После того, как расплавился резистор R_3, в схеме параллельно подключены резисторы R_1 и R_2, а последовательно к ним подключен резистор R_4. При этом через R_1 течёт ток I_4, через R_4 — I_3, а через R_2 — $I_3 - I_4$. Отсюда имеем равенство напряжений на R_1 и R_2, а так же суммарное напряжение (ещё два закона Ома):

$$I_4R_1 = (I_3 - I_4)cR_1$$

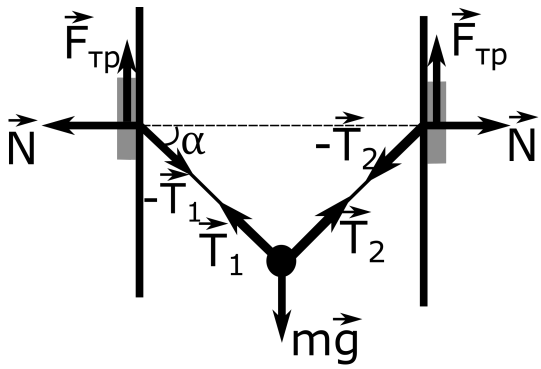
$$I_4R_1 + I_3cR_3 = U_2$$

Из первого имеем $c = 2$, а из второго: $2R_1 + 6R_3 = 14$ кОм. Подставляя $c = 2$ в уже имеющееся уравнение получим:

$$U_1 = \frac{2}{3}\cdot(R_1+R_3) \Rightarrow R_1 + R_3 = 3 \text{ кОм}$$

Значит, $R_1 = 1$ кОм, $R_3 = 2$ кОм, $R_2 = 2$ кОм, $R_4 = 4$ кОм.

Задача 5. Джеймс Бонд



Рассмотрим силы, действующие на тело: на него действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и две силы натяжения веревок $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ (из симметрии $T_1 = T_2$). Запишем условие равновесия этого груза:

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + m\vec{g} = \vec{0}$$

Теперь спроецируем его на вертикальную ось:

$$0 = T_1 \sin\alpha + T_2 \sin\alpha - mg = 2T_1 \sin\alpha \Leftrightarrow T_1 = \frac{mg}{2\sin\alpha}$$

Теперь рассмотрим силы, действующие на одну из пластин: $\vec{F}_{\text{тр}}, \vec{N}, -\vec{T}_1$. Запишем для неё условие равновесия:

$$\vec{F}_{\text{тр}} + \vec{N} - \vec{T}_1 = \vec{0}$$

Проецируем на оси:

$$\text{горизонтальная:} \quad 0 = T_1 \cos\alpha - N \Leftrightarrow N = T_1 \cos\alpha = \frac{mg}{2} \operatorname{ctg}\alpha$$

$$\text{вертикальная:} \quad 0 = F_{\text{тр}} - T_1 \sin\alpha \Leftrightarrow F_{\text{тр}} = T_1 \sin\alpha \Leftrightarrow \mu N = \frac{mg}{2} \Leftrightarrow \mu \operatorname{ctg}\alpha \frac{mg}{2} = \frac{mg}{2} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha = \mu$$

Из основного тригонометрического тождества имеем:

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{\mu^2 + 1}$$

Тогда можно найти расстояние между пластинами d:

$$d = 2l\cos\alpha = \frac{2l}{\sqrt{\mu^2 + 1}}$$

Вариант 2

Задача 1. Скользкая дорога

а) Вычислим тормозной путь:

$$l_{\text{ост}} = \frac{v^2}{2a} = \frac{(72/3{,}6)^2}{10} = 40 \text{ м}$$

Осталось учесть тот путь, который пройдет автомобиль до начала торможения:

$$S_{\text{р}} = vt = 20 \cdot 0{,}5 = 10 \text{ м}$$

Тогда полный путь, пройденный автомобилем с момента остановки предыдущего до момента остановки

$$l = l_{\text{ост}} + S_{\text{р}} = 50 \text{ м}$$

б) Заметим, что расстояние между автомобилями сначала уменьшается с постоянным ускорением a, затем уменьшается с постоянной скоростью (так как машины тормозят с одинаковым ускорением), а в конце снова уменьшается с постоянным ускорением a. Сначала в течение времени $t_{\text{р}}$ дистанция сокращается с ускорением a, а потому за это время оно уменьшится на

$$S_1 = \frac{at_{\text{р}}^2}{2}$$

Далее разница скоростей (скорость сближения) постоянна и равна начальному значению разности скоростей:

$$\Delta v = at_{\text{р}}$$

И значит, за время остановки переднего автомобиля (то есть за время $t_2 = \frac{v - at_{\text{р}}}{a}$), дистанция сокращается на

$$S_2 = \Delta v t_2 = \frac{at_{\text{р}}(v - at_{\text{р}})}{a}$$

Наконец, на последнем участке будет торможение с постоянным ускорением a, с начальной скорости $v_3 = v - at_2$:

$$S_3 = \frac{v_3^2}{2a} = \frac{(v - at_2)^2}{2a}$$

В сумме дистанция уменьшится на:

$$l = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{at_{\text{р}}^2}{2} + (vt_{\text{р}} - at_{\text{р}}^2) + \frac{(at_{\text{р}})^2}{2a} = vt_{\text{р}} = 10 \text{ м}$$

Второй пункт допускает и другое решение. Очевидно, что тормозной путь одинаков, вне зависимости от машины и от начала торможения (и равен 25 м, из предыдущего пункта). Таким образом, чтобы машины не столкнулись достаточно того, чтобы водитель заднего автомобиля начал тормозить в той же точке, что и первый. Это означает, что он должен проехать расстояние, равное дистанции между автомобилями за время реакции: $s_{\text{р}} = 10$ м — из предыдущего пункта. Таким образом $l = 10$ м

Задача 2. День рождения

Когда мальчик делает уроки на компьютере, мощность тепловыделения процессора ($P_{\text{уроки}}$) меньше, чем когда он играет ($P_{\text{игры}}$). В каждом случае температура процессора устанавливается так, чтобы мощность тепловыделения сравнялась с мощностью теплоотдачи системы охлаждения ($P_{\text{охл}}$). В условии говорится, что мощность системы охлаждения пропорциональная разности температур процессора и воздуха в комнате. Тогда отношение этих разностей температур для случая, когда мальчик играет и делает уроки даст отношение мощностей тепловыделения процессора. Значение этих мощностей не меняется от качества работы системы охлаждения, тогда обозначив за T_x искомую температуру мы можем записать отношение так

$$\frac{T_x - 20°C}{35°C - 20°C} = \frac{45°C - 20°C}{25°C - 20°C},$$

откуда находим $T_x = 95°C$, значит компьютер перегревается, и мальчик не сможет поиграть.

Более строго ответ можно получить следующим образом. То что мощность системы охлаждения пропорциональна разности температур запишем так:

$$P_{\text{охл}} = \alpha \cdot (T - T_0)$$

здесь T — температура процессора, T_0 — комнатная температура, а α — некоторый неизвестный коэффициент пропорциональности.

Теперь запишем уравнения теплового баланса в случае, когда система охлаждения работает в штатном режиме:

$$P_{\text{уроки}} = \alpha \cdot (T_{\text{у}} - T_0)$$
$$P_{\text{игры}} = \alpha \cdot (T_{\text{и}} - T_0)$$

Когда система охлаждения стала работать хуже, изменился коэффициент пропорциональности (будем называть его $\varkappa$). Значит уравнения теплового баланса после неисправности записываются как:

$$P_{\text{уроки}} = \varkappa \cdot (T'_{\text{у}} - T_0)$$
$$P_{\text{игры}} = \varkappa \cdot (T'_{\text{и}} - T_0)$$

Нагрузка на процессор в каждом из режимов осталась прежней. Приравняем выражения для мощностей до и после поломки:

$$\varkappa \cdot (T'_{\text{у}} - T_0) = \alpha \cdot (T_{\text{у}} - T_0)$$
$$\varkappa \cdot (T'_{\text{и}} - T_0) = \alpha \cdot (T_{\text{и}} - T_0)$$

Выразим из этой системы $T'_{\text{и}}$

$$T'_{\text{и}} = T_0 + (T_{\text{и}} - T_0) \cdot \frac{\alpha}{\varkappa} = T_0 + (T_{\text{и}} - T_0) \cdot \frac{T'_{\text{у}} - T_0}{T_{\text{у}} - T_0}$$

Подставляя значения из условия получаем

$$T'_{\text{и}} = 95°C$$

Значит компьютер перегревается, и мальчик не сможет поиграть.

Задача 3. Гонки роботов

Пусть O — общий центр круговых траекторий двух роботов, первый робот имеет имя N_1, второй — N_2, A — положение первого робота в момент времени $t = 0$, B — в момент $t' = T/2 = 105$ с. Где T — время одного полного оборота первого робота (см. рис).

$$OA = OB = R_1 = R$$

Определим положение второго робота в эти же моменты времени. При $t = 0$, $x_1 = R$. Этому условию удовлетворяют две точки C_1 и C_2.

$$AC_1 = AC_2 = x_1 = R$$

$$OA = R_1 = R, \quad OC_1 = OC_2 = R_2 = \sqrt{2}R$$

Видно, что $AC_1^2 + OA^2 = OC_1^2$ (то же для точки C_2). Треугольники $\triangle OAC_1$ и $\triangle OAC_2$ — прямоугольные, равнобедренные, $\angle AOC_1 = \angle AOC_2 = 45°$.

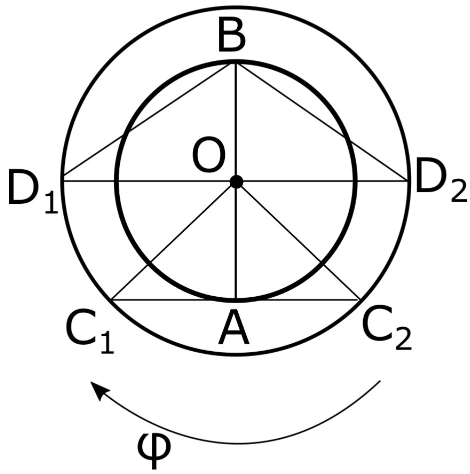
При $t' = 105$ с второй робот находится на расстоянии $x_2 = \sqrt{3}R$ от первого. Этому условию удовлетворяют две точки D_1 и D_2.

$$BD_1 = BD_2 = x_2 = \sqrt{3}R$$

$$OB = R_1 = R, \quad OD_1 = OD_2 = R_2 = \sqrt{3}R$$

Видно, что $OD_1^2 + OB^2 = BD_1^2$ (то же для точки D_2). Треугольники $\triangle BOD_1$ и $\triangle BOD_2$ — прямоугольные, $\angle AOD_1 = \angle AOD_2 = 90°$.

Проанализируем все возможные варианты перемещения робота N_2 за время t'. В условии задачи не сказано, в каком направлении движутся роботы. Пусть второй робот движется по часовой стрелке. Тогда его положение будем задавать углом φ, который отсчитывается от OA (см. рис). При этом будем помнить, что $\Delta\varphi < 360°$ по условию задачи.



Изменение положения $C_1 \to D_1$ даёт изменение угла $\Delta\varphi = 45°$ и перемещение $1/8$ в долях от $2\pi R_2$.

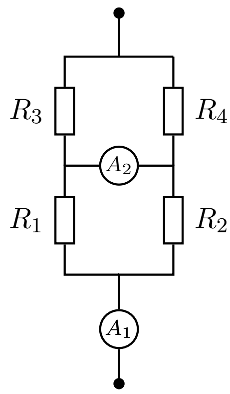
Изменение положения $C_1 \to D_2$ даёт изменение угла $\Delta\varphi = 225°$ и перемещение $5/8$ в долях от $2\pi R_2$.

Изменение положения $C_2 \to D_1$ даёт изменение угла $\Delta\varphi = 135°$ и перемещение $3/8$ в долях от $2\pi R_2$.

Изменение положения $C_2 \to D_2$ даёт изменение угла $\Delta\varphi = 315°$ и перемещение $7/8$ в долях от $2\pi R_2$.

Нетрудно проверить, что для движения против часовой стрелки мы получим тот же набор значений перемещения второго робота: $1/8$, $3/8$, $5/8$ и $7/8$ от $2\pi R_2$. Таким образом, второму роботу для одного оборота по траектории потребуется $8 \cdot t'$, $8/3 \cdot t'$, $8/5 \cdot t'$ или $8/7 \cdot t'$. Это 1680 с, 560 с, 336 с, 240 с соответственно.

Задача 4. Плавление схемы



Обозначим показания вольтметра как U_1, U_2; показания первого амперметра I_1, I_3; второго — I_2, I_4.

Так как $I_2 = 0$, токи в первом и во втором параллельном соединениях делятся одинаковым образом. Значит, отношения сопротивлений резисторов равны (вводим новую переменную):

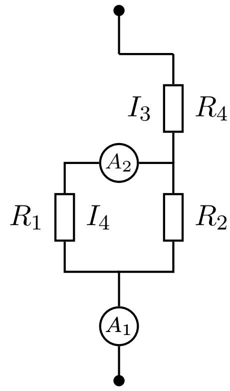
$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_4}{R_3} = c$$

Тогда сопротивление исходной схемы:

$$\frac{1}{\dfrac{1}{R_1+R_3} + \dfrac{1}{R_2+R_4}} = \frac{1}{\dfrac{1}{R_1+R_3}\left(1+\dfrac{1}{c}\right)} = \frac{c}{c+1}(R_1+R_3)$$

Итак, тогда (закон Ома)

$$U_1 = I_1(R_1+R_3)\frac{c}{c+1}$$



После того, как расплавился резистор R_3, в схеме параллельно подклчены резисторы R_1 и R_2, а последовательно к ним подключен резистор R_4. При этом через R_1 течёт ток I_4, через R_4: I_3, а через R_2: $I_3 - I_4$. Отсюда имеем равенство напряжений на R_1 и R_2, а так же суммарное напряжение (ещё два закона Ома):

$$I_4R_1 = (I_3 - I_4)cR_1$$

$$I_4R_1 + I_3cR_3 = U_2$$

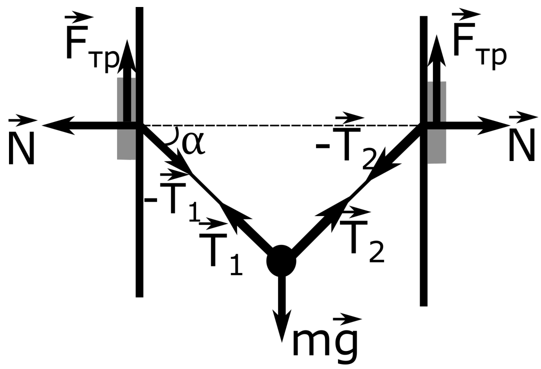
Из первого имеем $c = 3$, а из второго: $3R_1 + 12R_3 = 39$ кОм. Подставляя $c = 3$ в уже имеющееся уравнение получим:

$$U_1 = \frac{3}{4}(R_1+R_3) \Rightarrow R_1 + R_3 = 4\text{ кОм}$$

.

Значит, $R_1 = 1$ кОм, $R_3 = 3$ кОм, $R_2 = 3$ кОм, $R_4 = 9$ кОм.

Задача 5. Джеймс Бонд



Рассмотрим силы, действующие на тело: на него действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и две силы натяжения веревок $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ (из симметрии $T_1 = T_2$). Запишем условие равновесия этого груза:

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + m\vec{g} = \vec{0}$$

Теперь спроецируем его на вертикальную ось:

$$0 = T_1 \sin\alpha + T_2 \sin\alpha - mg = 2T_1 \sin\alpha \Leftrightarrow T_1 = \frac{mg}{2\sin\alpha}$$

Теперь рассмотрим силы, действующие на одну из пластин: $\vec{F}_{\text{тр}}, \vec{N}, -\vec{T}_1$. Запишем для неё условие равновесия:

$$\vec{F}_{\text{тр}} + \vec{N} - \vec{T}_1 = \vec{0}$$

Проецируем на оси:

$$\text{горизонтальная:}\quad 0 = T_1 \cos\alpha - N \Leftrightarrow N = T_1 \cos\alpha = \frac{mg}{2}\operatorname{ctg}\alpha$$

$$\text{вертикальная:}\quad 0 = F_{\text{тр}} - T_1 \sin\alpha \Leftrightarrow F_{\text{тр}} = T_1 \sin\alpha \Leftrightarrow \mu N = \frac{mg}{2} \Leftrightarrow \mu \operatorname{ctg}\alpha \frac{mg}{2} = \frac{mg}{2} \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha = \mu$$

Из основного тригонометрического тождества имеем:

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{\mu^2 + 1}$$

Тогда можно найти расстояние между пластинами d:

$$d = 2l\cos\alpha = \frac{2l}{\sqrt{\mu^2 + 1}}$$